

# On evaluations of spectrum and matrix elements of Coxeter-Laplace operators in vector spaces generated by Young tableaux

**D.A. Ashkadov**

(St. Petersburg State Polytechnical University)

*E-mail address:* dmitry.ashkadov@gmail.com

**N.N. Vasilyev**

(St.Petersburg Department of V.A.Steklov Institute of Mathematics, Russian Acad. of Sci.)

*E-mail address:* vasiliev@pdmi.ras.ru

We consider Coxeter-Laplace operators in vector spaces generated by all Young tableaux with some fixed shape. In the case of two column rectangular diagram as the shape this problem is connected to quantum isotropic XXX-Heisenberg model due to well known Bethe ansatz. Dimensions of corresponded vector spaces are presented by Catalan numbers  $\frac{1}{N+1}C_{2N}^N$  and are really huge even for relatively small values of  $N$ . We describe corresponded algorithms and software and present some results about evaluations of maximal eigenvalues and corresponded eigenvectors of these operators, which are consistent with conjectures about their asymptotic behavior.

## Вычисление спектра и матричных элементов операторов Кокстера-Лапласа в векторных пространствах, порожденных таблицами Юнга

**Д.А. Ашкадов**

(Санкт Петербургский Государственный Политехнический Университет)

*E-mail address:* dmitry.ashkadov@gmail.com

**Н.Н. Васильев**

(Санкт Петербургское Отделение Математического Института им. В.А. Стеклова РАН)

*E-mail address:* vasiliev@pdmi.ras.ru

Работа посвящена исследованию спектра операторов Кокстера-Лапласа, действующих в векторных пространствах, порожденных всеми таблицами Юнга некоторой фиксированной формы. Спектральный анализ этих операторов связан с построением точных решений уравнений, описывающих изотропную периодическую цепочку  $N$  взаимодействующих частиц с одинаковыми спинами — так называемую XXX модель Гейзенберга. Эта задача оказывается связанной с теорией представлений симметрической группы и комбинаторикой таблиц и диаграмм Юнга при помощи известного анзаца Бетэ, описывающего форму точных решений этой задачи квантовой механики. Соответствующий оператор Кокстера-Лапласа может быть записан как сумма операторов, соответствующих кокстеровским транспозициям. Представление симметрической группы используемое в XXX модели действует в векторном пространстве, порожденном всеми прямоугольными двустрочечными таблицами Юнга из  $2N$  клеток. Размерность этого пространства выражается числом Каталана  $\frac{1}{N+1}C_{2N}^N$  и растет экспоненциально с ростом  $N$ . При исследовании спектра операторов Кокстера-Лапласа

приходится решать задачу на собственные значения в пространствах таких огромных размерностей. В опубликованной литературе очень мало строго доказанных результатов об асимптотическом поведении спектра соответствующих операторов и матричных элементов, поэтому актуальным является проведение вычислительных экспериментов, позволяющих проверять гипотезы о таком асимптотическом поведении. Также исследуются операторы, соответствующих не только прямоугольным диаграммам, а и диаграммам произвольной формы, например, диаграммам с максимальным количеством таблиц Юнга или же случайным диаграммам с заданным распределением. Эти вычисления требуют привлечения как эффективных алгоритмов для работы с разреженными матрицами в пространствах высоких размерностей так и алгоритмов, связанных с операциями над таблицами и диаграммами Юнга и матрицами операторов, действующих в пространствах, порожденных таблицами Юнга. Были разработаны специальные методы кодирования таблиц, их нумерации и хранения в памяти компьютера. Отметим также, что операторы, для которых решается задача на собственные значения, сами по себе не являются разреженными, но, используя их структуру, оказалось возможным вычислять действие этих операторов на линейные комбинации таблиц. Все это позволило нам вычислять собственные векторы в пространствах с размерностями до нескольких миллионов. Разработанный пакет программ достаточно универсален и может использоваться при компьютерном моделировании других задач асимптотической комбинаторики и теории представлений.