On symbolical and numerical integration of 1st order ordinary differential equations

M.D. Malykh (MSU, PFUR; Moscow)
E-mail address: malykhmd@yandex.ru

Under classical approach to integration of nonlinear differential equation $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$, $p, q \in \mathbb{Q}[x,y]$, in finite terms we make some assumption about dependence of general solution y on x. For ex. the problem, attributed to Beaune (1630) or Poincaré (1890), consists of finding an algebraic integral, the problem, attributed to Liouville (1840), consists of finding an integral among elementary function etc. In my report in Dubna'2014 I told about the problem from early mémoire of Painlevé (1890); this problem is duality with respect to Beaune problem and consists of finding an integral when general solution is algebraic functions of a constant, but possible transcendental function of x. From the analytical viewpoint is impotent that these functions surely are classical transcendent i.e. solutions of some Riccati equation [Painlevé, 1890, Umemura, 1990, Malykh, 2015]. For numerical integration is impotent that its integral defines algebraic (n,n)-correspondence between initial and terminating layers. So there is an finite difference method scheme such that correspondence between any layers has the same type. These schemes favourably differ from Euler's schemes because they allow to pass singularity without accumulation of errors [Malykh, 2015]. Therefore both for symbolical, and numerical integration of such equations we may reduce given equation to Riccati equation by algebraic ansatz, the algorithm will be presented in the report.

О символьном и численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

М.Д. Малых (МГУ, РУДН; Москва)
E-mail address: malykhmd@yandex.ru

При классическом подходе к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$, $p, q \in \mathbb{Q}[x,y]$, в конечном виде, делают некоторые предположения о зависимости общего решения y от x. Напр., задача, начало исследования которой связывают с именами Дебона (1630) или Пунакаре (1890), состоит в отыскании алгебраических интегралов, задача Лиувилля (1840) — в отыскании интеграла среди элементарных функций и т.д. В моем докладе в Дубне'2014 речь шла о задаче из раннего мемуара Пенлеве (1890); эта задача двойственная к проблеме Дебона и состоит в отыскании интеграла в том случае, когда общее решение зависит от константы алгебраически, а относительно зависимости его от x не делается никаких предположений. С аналитической точки зрения важно, что в таком случае зависимость общего решения описывается при помощи классических трансцендентных функций, т.е. решений некоторого уравнения Риккати [Painlevé, 1890, Umemura, 1990, Malykh, 2015]. Для численного же интегрирования важно, что интеграл этого ОДУ задает алгебраическое (n,n)-соответствие между начальными и кончеными данными. Поэтому по методу конечных разностей должно быть возможно составить такую разностную схему, которая задает между слоями соответствие того же типа. Такие схемы выгодно отличаются от схемы Эйлера тем, что они не накапливают ошибку при прохождении особых точек [Malykh, 2015]. Таким образом, как для символьного, так и для численного интегрирования таких ОДУ мы можем свести заданное ОДУ к уравнению Риккати алгебраической подстановкой; алгоритм ее отыскания и будет предложен в докладе.